

# El Principio de Mínima Acción y el Teorema de Noether

Sergio Ferrando Solera

## 1. La mecánica newtoniana y sus limitaciones.

La mecánica es la rama de la física que estudia el movimiento de los sistemas de partículas. El problema fundamental al que se enfrenta es el siguiente: dado un conjunto de  $N$  masas puntuales <sup>1</sup>  $m_1, m_2, \dots, m_N$  encontrar la posición de todas ellas en función del tiempo. Sabemos que para determinar unívocamente la posición de un punto en el espacio físico son necesarios, en principio, tres números reales a los que denominamos coordenadas. De esta forma, describiendo la posición de la masa  $i$ -ésima en términos de sus coordenadas cartesianas  $\mathbf{r}_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3)$  nuestro objetivo es conocer el vector:

$$\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)) \quad (1)$$

Esto es, el conjunto de las  $3N$  coordenadas que definen nuestro sistema en función del tiempo. Debemos notar que, implícitamente, estamos diciendo que es posible conocer con infinita precisión la trayectoria de todas nuestras partículas. Esto denota que estamos tratando con una teoría clásica. En teorías más fundamentales como las teorías cuánticas no tiene sentido preguntarse por la trayectoria de una partícula. Las relaciones de incertidumbre de Heisenberg hacen que conocer esta sea imposible.

En este instante, debemos preguntarnos cómo obtener la posición en función del tiempo de nuestras masas. Resulta obvio que para poder hacer eso necesitamos dos elementos: en primer lugar, hay que conocer de alguna forma toda la información de nuestro sistema, es decir, todas las interacciones (internas y externas) a las que está sometido; en segundo lugar, necesitamos algún procedimiento para, a partir de esa información, obtener la trayectoria de las partículas. Dependiendo de dónde almacenamos la información y de cómo la sacamos de ahí nos encontramos con diferentes vertientes de la mecánica clásica. De momento, estudiaremos la desarrollada por Newton y conocida por tanto como mecánica newtoniana.

---

<sup>1</sup>En el caso en el que tengamos un objeto extenso lo que hacemos es descomponer este en partes tan pequeñas que se puede considerar que carecen de estructura interna y así tratarlas como masas puntuales.

La mecánica newtoniana se basa en postular la existencia de una cierta función vectorial de  $3N$  componentes que contiene toda la información del sistema. Esta función se debe determinar, generalmente, de forma experimental para cada caso. No obstante, vamos a tomar como postulado el siguiente resultado empírico de importancia fundamental: la función vectorial que caracteriza el sistema depende exclusivamente de la posición de todas las partículas, su velocidad y el tiempo. Es decir:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (2)$$

Donde usamos la notación de colocar un punto sobre la magnitud para representar su derivada total respecto del tiempo. El método para obtener a partir de esa función las ecuaciones del movimiento consiste simplemente en igualarla a la aceleración de las partículas:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (3)$$

A partir de nuestro conocimiento de ecuaciones diferenciales sabemos que la expresión 3 nos está diciendo que, conociendo la posición y la velocidad de todos los componentes del sistema en un cierto instante del tiempo, tenemos unívocamente determinada su trayectoria. Esa ecuación suele escribirse para cada una de las partículas de la siguiente forma:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (4)$$

donde  $\mathbf{a}$  denota la aceleración. Ahora, es habitual multiplicar en ambos miembros de la igualdad por la masa del objeto:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (5)$$

Esta es la segunda ley de Newton, que nos define el concepto de fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre cada partícula. Vamos a escribir la ecuación 4 en una dimensión. De esta forma, podemos prescindir del carácter vectorial de las magnitudes:

$$\ddot{x}(t) = f(x, \dot{x}, t) \quad (6)$$

A partir de aquí, mostramos diversos ejemplos de funciones  $f(x, \dot{x}, t)$  que son determinadas, como ya hemos dicho, de forma experimental para cada sistema:

1. *Objeto cayendo bajo la acción de la gravedad cerca de la superficie de la Tierra:*

$$\ddot{x}(t) = -g \quad (7)$$

Donde  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$  representa la aceleración de la gravedad en la Tierra que, realmente, depende de la altura y el punto sobre la superficie de esta en el que nos encontramos.

2. *Objeto anclado a un muelle (oscilador armónico simple):*

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 (x - x_o) \quad (8)$$

Donde  $\omega$  representa la frecuencia angular y  $x_o$  la posición de equilibrio del muelle.

3. *Esfera pequeña moviéndose a velocidades bajas en un fluido (ley de Stokes):*

$$\ddot{x}(t) = -\frac{6\pi R\eta}{m} \dot{x} \quad (9)$$

Donde  $R$  es el radio de la esfera,  $m$  su masa y  $\eta$  la viscosidad del fluido.

4. *Objeto anclado a un muelle en el seno de un fluido y sometido a una fuerza externa periódica (oscilador amortiguado y forzado):*

$$\ddot{x}(t) = -\omega_o^2 (x - x_o) - 2\gamma\dot{x} + f_o \cos(\omega t) \quad (10)$$

Donde  $\omega_o$  es la frecuencia natural del oscilador,  $x_o$  la posición de equilibrio del muelle,  $\gamma$  un coeficiente de amortiguamiento,  $\omega$  la frecuencia de la fuerza periódica y  $f_o$  su amplitud entre la masa.

La mecánica newtoniana es, desde luego, un gran logro intelectual y permite la resolución de gran cantidad de sistemas dinámicos. No obstante, hay ciertos aspectos donde se muestra poco eficiente. El más claro ejemplo es la resolución de sistemas donde tenemos ligaduras. Supongamos que, debido a ciertas fuerzas que actúan sobre nuestras partículas, el conjunto de posibles posiciones en el espacio que estas pueden tomar se ve reducido a un subconjunto de  $\mathbb{R}^{3N}$ . Un claro ejemplo son las cuentas en un ábaco. Debido a las fuerzas que la barra en la que se encuentran ejerce sobre ellas, su movimiento se ve restringido a una única dimensión en lugar de a las tres dimensiones propias de una partícula libre. Diremos que las ligaduras de nuestro sistema son holónomas si estas se pueden expresar como:

$$g(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (11)$$

Si tenemos  $m$  relaciones de ese tipo la dimensión de nuestro problema pasa a ser  $n = 3N - m$ . Así, hablamos de un sistema con  $n$  grados de libertad. En términos geométricos, las posibles posiciones de nuestro sistema se pueden representar por una hipersuperficie contenida o embebida en  $\mathbb{R}^{3N}$ . En los casos en los que no teníamos estas ligaduras era útil considerar para describir nuestras partículas las  $3N$  coordenadas cartesianas del espacio. No obstante, cuando estas entran en juego, es mejor considerar un conjunto de  $n$  coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  a través de las cuales podemos caracterizar unívocamente cada punto de esa hipersuperficie.

Un ejemplo de esto es un péndulo. Si suponemos que la lenteja del péndulo está sujeta por una barra rígida, esta restringe las posibles posiciones de nuestra masa a un círculo. Ese círculo sería nuestra hipersuperficie embebida en  $\mathbb{R}^{3N}$ . En este caso, no es más que una línea curva embebida en  $\mathbb{R}^2$ . De nuevo, la forma natural de describir ese conjunto de puntos no es mediante sus coordenadas cartesianas  $\mathbf{r} = (x, y)$ , es mediante una única coordenada generalizada  $q$  que en este caso podría ser el ángulo polar  $\theta$ .

Lo que aquí estamos indicando es que, puesto que ya conocemos la solución a la ecuación de movimiento para la coordenada radial  $r$  (sabemos que es  $r = l$  siendo  $l$  la longitud del péndulo), deberíamos escribir la ecuación de Newton en coordenadas polares para obtener  $\theta(t)$ . El problema es que la ecuación de Newton es una ecuación vectorial, lo que significa que no permanece invariante bajo cambios de base. En el caso del péndulo, hacer ese cambio es sencillo pero en general puede convertirse en una tarea complicada.

En resumen, la mecánica newtoniana se hace poco eficiente cuando trabajamos en otras coordenadas que no sean las cartesianas, lo que es particularmente útil en sistemas con ligaduras holónomas. Esto es debido al hecho de que las fuerzas son magnitudes vectoriales, que no son invariantes bajo cambios de base. De esta forma, resulta lógico pensar que para esos casos debemos recurrir a una formulación de la mecánica clásica basada en cantidades escalares.

## 2. El principio de mínima acción.

La mecánica newtoniana postulaba la existencia de una cierta función vectorial  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  que contiene toda la información de nuestro sistema. En este momento, vamos a introducir una formulación de la mecánica equivalente a la que ya conocemos pero basada en otra de esas magnitudes, el lagrangiano, una cantidad escalar.

Llamamos mecánica lagrangiana a aquella que se basa en el estudio del lagrangiano, cuya importancia es equivalente a la de las fuerzas en la mecánica newtoniana. Más allá del carácter escalar o vectorial de estas cantidades, hay una diferencia fundamental entre ambas magnitudes. De la misma forma que las fuerzas vienen descritas de forma natural en términos de las  $3N$  coordenadas cartesianas de nuestro sistema, el lagrangiano se describe en términos de las  $n$  coordenadas generalizadas que describen el conjunto de posiciones que las partículas pueden tomar dadas sus ligaduras.

A su vez, puesto que las fuerzas dependen no solo de las posiciones sino también de las velocidades y del tiempo de forma explícita, el lagrangiano  $\mathcal{L}$  dependerá no solo de las coordenadas generalizadas, sino también de las velocidades generalizadas y el tiempo. Es decir,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ .

Ahora, necesitamos un método, equivalente a la segunda ley de Newton, para obtener, a partir del lagrangiano, las ecuaciones de movimiento. Ese método es el principio de mínima acción. Supongamos que tenemos un sistema caracterizado por un cierto

lagrangiano  $\mathcal{L}$  que en un tiempo  $t_1$  ocupa unas coordenadas  $\mathbf{q}_1$  y en un tiempo  $t_2$  unas coordenadas  $\mathbf{q}_2$ . En ese caso, si  $\mathbf{q}(t)$  representa la trayectoria de nuestras partículas, para ella, la acción  $S$  definida según:

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \quad (12)$$

toma un valor estacionario.<sup>2</sup> Así pues, vamos a considerar una curva  $\mathbf{q}'(t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t)$  que representa una trayectoria virtual del sistema ya que  $\mathbf{q}(t)$  es la trayectoria real. Como hemos dicho, nuestras partículas en  $t_1$  se caracterizan por un valor de las coordenadas  $\mathbf{q}_1$  y en  $t_2$  por un valor  $\mathbf{q}_2$ , por lo que es necesario que  $\mathbf{h}(t_1) = \mathbf{h}(t_2) = \mathbf{0}$ . Teniendo en cuenta eso, vamos a calcular la diferencia entre la acción evaluada para  $\mathbf{q}'$  y la acción evaluada para  $\mathbf{q}$ .

$$S[\mathbf{q} + \mathbf{h}] - S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \mathcal{L}(\mathbf{q} + \mathbf{h}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{h}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] dt \quad (13)$$

Ahora, vamos a considerar que el lagrangiano es una función diferenciable tantas veces como queramos respecto de todos sus argumentos.<sup>3</sup> De esta forma, podemos escribir la expresión 13 según:

$$S[\mathbf{q} + \mathbf{h}] - S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} h_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i \right) dt + \mathcal{O}(\mathbf{h}^2) \quad (14)$$

Como vemos, hemos escrito ese incremento en la acción como la suma de dos términos, el primero de ellos lineal en  $\mathbf{h}$  y el segundo de orden superior. Esto, por analogía con el análisis de variable real, significa que ese funcional es diferenciable. Y, de la misma forma que para las funciones diferenciables, decimos que ese funcional tiene un valor estacionario en  $\mathbf{q}$  si el término lineal se anula para cualquier  $\mathbf{h}$ . Al término lineal lo llamamos variación y escribimos:

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} h_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i \right) dt = 0 \quad (15)$$

Por otra parte, las componentes  $h_i$  son independientes y arbitrarias. Podríamos tomar todas ellas iguales a cero excepto una, por lo que para ella debería anularse la integral asociada. Eso lo podemos hacer con todas las componentes, lo que implica que todas esas integrales se anulan por separado.

---

<sup>2</sup>Aunque se llame principio de mínima acción realmente esta puede ser también un máximo y un punto de silla.

<sup>3</sup>Realmente, solo es necesario que sea diferenciable una única vez respecto de todos sus argumentos y que las derivadas parciales sean continuas. No obstante, considerando eso el razonamiento es algo más refinado que el que vamos a realizar.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} h_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i \right) dt = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (16)$$

Ahora, para el segundo sumando utilizamos la regla del producto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} h_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) h_i \quad (17)$$

Sustituyendo la ecuación 17 en la ecuación 16 e integrando, obtenemos la siguiente relación:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) h_i dt + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} h_i \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (18)$$

Pero debemos recordar que se debía cumplir  $\mathbf{h}(t_1) = \mathbf{h}(t_2) = \mathbf{0}$ . Eso nos lleva a la siguiente conclusión:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) h_i dt = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (19)$$

Finalmente, como eso debe cumplirse para cualquier  $h_i$  no queda más remedio que el otro término del integrando se anule. De esta forma, llegamos a las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)} \quad (20)$$

Esto representa un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que nos permitirá obtener  $\mathbf{q}(t)$ . Hemos llegado a lo que queríamos, ecuaciones de movimiento que no dependen de las coordenadas elegidas y que, por tanto, son ideales para abordar sistemas con ligaduras holónomas. Cabría preguntarse ahora por la validez del principio de mínima acción, no obstante, dejaremos eso para la sección siguiente.

No podíamos evitar recalcar la generalidad del método que hemos utilizado a la hora de encontrar los valores estacionarios de la acción. En general, uno se encuentra muchas veces con funcionales de la forma

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (21)$$

y desea encontrar sus valores extremos. Nosotros hemos obtenido una condición necesaria de extremo, pero no suficiente. Aun así, sucede que en muchos problemas la existencia de un mínimo o máximo del funcional es obvia y, dado que suele pasar que solo hay una curva que cumpla con las ecuaciones de Euler-Lagrange y las condiciones de contorno apropiadas, sabemos que se trata de un extremo. Vamos a ver diversos ejemplos.

1. *Geodésicas*. Como ya sabemos, en un espacio con la métrica usual euclídea, podemos calcular la longitud de una curva que pasa por dos puntos dados de acuerdo con:

$$L_C = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (22)$$

Esa expresión es análoga a la que tenemos en la ecuación 21 por lo que si queremos encontrar un extremo de ese funcional (que es obvio que debe tener un mínimo) solo hay que aplicar Euler-Lagrange. Puesto que  $F(x, y, y')$  no depende explícitamente de  $y$ , por Euler-Lagrange su derivada parcial respecto de  $y'$  es una constante.<sup>4</sup>

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

Pero eso también implica que  $y'$  es una constante.

$$y' = C_1$$

Con lo que llegamos a la siguiente curva como valor extremo del funcional:

$$y(x) = C_1 x + C_2 \quad (23)$$

Lo que demuestra que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta. Esto lo hemos calculado para un espacio con la métrica usual euclídea. En el caso de tener una métrica  $g_{ij}$  definida positiva, la longitud de una curva es:

$$L_C = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j} dt \quad (24)$$

De esta forma, aplicando Euler-Lagrange, tenemos la ecuación de una geodésica en un espacio con una métrica más general.

2. *Trayectoria de un rayo de luz*. La ecuación de la trayectoria de un rayo de luz se puede determinar a partir del principio de Fermat. Este establece que el tiempo que tarda el rayo de ir de un punto  $A$  a un punto  $B$  debe tomar un valor estacionario. Generalmente en lugar del tiempo se usa el camino óptico (el tiempo multiplicado por la velocidad de la luz en el vacío), que se calcula de acuerdo con:

---

<sup>4</sup>Cuando esto sucede para una cierta coordenada  $q_i$  en mecánica decimos que tenemos una coordenada cíclica. Como se ve en el razonamiento empleado, las coordenadas cíclicas implican cantidades conservadas.

$$L = \int_A^B n(x, y, z) ds = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(x, y, z) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} d\lambda \quad (25)$$

Donde  $ds$  es el elemento diferencial de longitud de curva y  $n$  el índice de refracción. De nuevo, aplicando Euler-Lagrange llegamos a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (26)$$

Existe otro problema de cálculo variacional extremadamente famoso, el problema de la braquistócrona. Dados dos puntos  $A$  y  $B$ , encontrar qué trayectoria debe seguir una masa para ir de uno a otro en el menor tiempo posible bajo la acción de la gravedad. Este problema será más sencillo de resolver después de introducir una serie de conceptos de los que hablaremos en secciones posteriores.

### 3. La validez del principio de mínima acción. El principio de D'Alembert.

Vamos a comenzar considerando un sistema de  $N$  partículas que no están sometidas a ningún tipo de ligadura. A su vez, supondremos que la fuerza que actúa sobre la partícula  $i$ -ésima se puede escribir de acuerdo con:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (27)$$

Donde  $\nabla_i$  representa el gradiente respecto de las coordenadas de la partícula  $i$ -ésima. A la magnitud escalar  $V$  la llamamos energía potencial aunque es habitual referirse a ella en el contexto de la mecánica simplemente como potencial. Gran cantidad de fuerzas pueden expresarse de la forma anterior, entre ellas la fuerza gravitatoria, la fuerza de un resorte y la fuerza electrostática. El hecho de que se puedan escribir así está vinculado a la conservación de la energía.

De acuerdo con la ecuación 27 podemos escribir para la coordenada  $x_i^j$  la segunda ley de Newton como:

$$m_i \ddot{x}_i^j = -\frac{\partial V}{\partial x_i^j} \quad (28)$$

Ahora, simplemente debemos reescribir la expresión 28 según:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i^j} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^{j2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i^j} (-V) = 0 \quad (29)$$

Pero debemos recordar que  $V = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ . De esta forma, la relación 29 es equivalente a:



$$\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i^j} - \frac{\partial}{\partial x_i^j} \right\} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^{j2} - V \right) = 0 \quad (30)$$

Así, es obvio que el lagrangiano de este sistema es:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (31)$$

A su vez, definimos la energía cinética de una partícula como:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (32)$$

y la energía cinética del sistema como la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas. Así, el lagrangiano en este caso podríamos decir que es simplemente  $\mathcal{L} = T - V$ . Aquí vamos a hacer notar que, aunque no lo demostramos, las ecuaciones de Euler-Lagrange son invariantes bajo cambios de coordenadas. Esto significa que escribiendo el lagrangiano en otras coordenadas y aplicando Euler-Lagrange sobre ellas la curva resultante es la misma que para las coordenadas originales.

No obstante, simplemente hemos demostrado que esa es la forma del lagrangiano para sistemas en los cuales no tenemos ligaduras. Para los casos en los que tenemos ligaduras debemos recurrir al llamado principio de D'Alembert. En primer lugar, vamos a definir lo que se conoce como desplazamiento virtual. Un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{r}_i$  de las coordenadas de la partícula  $i$ -ésima del sistema consistente con las ligaduras de este es aquel en el que, para un cierto instante, hacemos un cambio infinitesimal en la posición de nuestra partícula según las fuerzas de vínculo lo permitan. Se le llama virtual ya que no es el cambio que se produce en las coordenadas debido a pasar de un tiempo  $t$  a un tiempo  $t + dt$ .

Vamos a considerar la segunda ley de Newton escrita en términos del momento lineal de la partícula, que se define de acuerdo con,  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ . De esta forma, para la fuerza total  $\mathbf{F}_i^T$  sobre una partícula tenemos:

$$\mathbf{F}_i^T - \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0} \quad (33)$$

A su vez, podemos multiplicar la ecuación anterior por el desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{r}_i$  y obtenemos:

$$(\mathbf{F}_i^T - \dot{\mathbf{p}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Ahora, sumamos para todas las partículas:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^T - \dot{\mathbf{p}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0$$

El siguiente paso es considerar la fuerza como la suma de las fuerzas de vínculo  $\mathbf{F}^V$  y las fuerzas que no son de vínculo  $\mathbf{F}$ .

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}^V \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Finalmente, nos vamos a restringir a sistemas donde el segundo término sea nulo. Esto significa que las fuerzas de vínculo no realizan trabajo cuando hacemos un desplazamiento virtual. En sistemas con ligaduras holónomas donde tenemos, por ejemplo, una partícula moviéndose por una superficie, la fuerza de vínculo es la fuerza normal, que es perpendicular a la región por la cual podemos hacer un desplazamiento virtual de las coordenadas, con lo que no trabaja. Esto sigue siendo cierto aunque tomemos una superficie que cambia con el tiempo. Es cierto que esta ejerce un trabajo sobre la partícula puesto que cambia su energía, no obstante debemos recordar que los desplazamientos virtuales son a tiempo fijo con lo que estamos en un caso equivalente al primero.

Esto es más general que restringirnos solo a esos tipos de sistemas, podemos considerar incluso ligaduras no holónomas. Un disco rodando sin deslizar por una superficie tiene una ligadura no holónoma impuesta sobre su velocidad de traslación y su velocidad de giro con fuerza de vínculo asociada la fuerza de rozamiento sobre la superficie. No obstante, para esos casos como el punto de apoyo no se mueve tenemos un rozamiento estático, por lo que no hay trabajo. Para todos estos sistemas se cumple:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (34)$$

Este resultado es conocido como principio de D'Alembert. En muchos casos se suele escribir definiendo la fuerza de inercia  $\mathbf{I}_i = -\dot{\mathbf{p}}_i$ . Nosotros vamos a partir de la expresión 34 para demostrar las ecuaciones de Euler-Lagrange en sistemas con ligaduras holónomas. Lo primero es escribir  $\mathbf{r}_i$  en términos de las coordenadas generalizadas,  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$  y considerar la transformación de los desplazamientos virtuales:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Como vemos, no consideramos la variación en el tiempo puesto que los desplazamientos virtuales se realizan a tiempo fijo. Así, escribimos la ecuación 34 de acuerdo con:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \dot{\mathbf{v}}_i) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \quad (35)$$

Ahora, vamos a definir las fuerzas generalizadas  $Q_j$  como:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (36)$$

Como se puede apreciar por la expresión 36, la fuerza generalizada  $Q_j$  no es más que la proyección de la suma de todas las fuerzas  $\mathbf{F}_i$  sobre el vector asociado a la coordenada  $q_j$ . De esta forma, al ecuación 35 queda como:

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (37)$$

Lo que vamos a hacer ahora es aplicar la regla de la derivada del producto y escribir:

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

Sustituimos en la relación 37:

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j \quad (38)$$

El siguiente paso es escribir la velocidad en términos de las coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

De donde se obtiene fácilmente que:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

Por lo que podemos expresar la ecuación 38 como:

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j \quad (39)$$

Ahora, consideramos la siguiente derivada:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}$$

Sustituimos en la ecuación 39 y obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) \right] \delta q_j \quad (40)$$

Y reconociendo la energía cinética en la expresión 40:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \quad (41)$$

Finalmente, vamos a considerar que las fuerzas de nuestro sistema se pueden escribir como gradiente de un potencial que solo depende de las coordenadas de las partículas:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Sustituimos en 41 y aplicamos que el potencial solo depende de las posiciones de las partículas.

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right] \delta q_j = 0 \quad (42)$$

Finalmente, aplicamos que tenemos ligaduras holónomas y por tanto todos esos desplazamientos virtuales escritos en términos de las coordenadas generalizadas son independientes. De esa forma, llegamos a las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (43)$$

Y ya tenemos el lagrangiano de este tipo de sistemas:

$$\boxed{\mathcal{L} = T - V} \quad (44)$$

En resumen, hemos demostrado que para sistemas con ligaduras holónomas donde las fuerzas de vínculo no realizan trabajo virtual y todas las otras fuerzas se pueden escribir como el gradiente de un potencial, se cumple el principio de mínima acción (también conocido como principio de Hamilton). Para esos casos, el lagrangiano no es más que la energía cinética menos la energía potencial del sistema.

No obstante, podría suceder que un sistema que no cumpla con los requisitos anteriores sí cumpla el principio de Hamilton. Ciertamente es que en esos casos el lagrangiano ya no será energía cinética menos energía potencial. Por ejemplo, consideremos el lagrangiano dado por:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = e^{2\gamma t} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega_o^2 x^2 + m x f(t) \right] \quad (45)$$

Apliquemos Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= m e^{2\gamma t} [-\omega_o^2 x + f(t)] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m e^{2\gamma t} \dot{x} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m e^{2\gamma t} (2\gamma \dot{x} + \ddot{x})\end{aligned}$$

Y llegamos a la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_o^2 x = f(t) \quad (46)$$

Como ya sabemos, esta es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico forzado. Ese sistema no tiene ni siquiera una energía potencial definida pero, como hemos visto, sí le podemos asociar un lagrangiano. Es más, hasta ahora solo hemos considerado el caso no relativista. La mecánica lagrangiana sigue siendo válida para grandes velocidades, simplemente es necesario cambiar la forma del lagrangiano. Por ejemplo, tomemos el siguiente caso:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} - q\phi(\mathbf{r}, t) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (47)$$

Ese es el lagrangiano de un partícula relativista de carga  $q$  y masa  $m$  moviéndose a través de un campo electromagnético. De momento, consideramos que  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  no son más que unas ciertas funciones que caracterizan dicha interacción. Si aplicamos Euler-Lagrange llegamos a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \right) = q \left( -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + q\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (48)$$

Ahora, introducimos el factor  $\gamma$  relativista y definimos los campos eléctrico y magnético  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  para escribir:

$$\frac{d}{dt} (m\gamma\mathbf{v}) = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (49)$$

Donde hemos tomado:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Como se ve, si hubiésemos realizado una descripción basada en fuerzas (en este caso la trifuerza relativista) el objeto fundamental sería el campo. Pero con una descripción lagrangiana el objeto fundamental es el potencial.

## 4. Resolución de sistemas con ligaduras holónomas.

En esta sección vamos a mostrar el método general para resolver sistemas de masas puntuales con ligaduras holónomas. Así, veremos la verdadera potencia del formalismo lagrangiano en la mecánica. Creemos que, evidentemente, la mejor forma de entender el procedimiento a seguir es con un ejemplo. De esta forma, consideremos una masa puntual moviéndose por un paraboloide, esto es, restringida a la superficie  $z - ar^2 = 0$ .

El primer paso es simplemente escribir el vector posición de cada una de las partículas que forman nuestro sistema. En este caso solo tenemos una de ellas, por lo que es sencillo; en otros, los vectores pueden estar relacionados entre ellos debido a las ligaduras, por ejemplo, en el péndulo doble. El vector posición se debe escribir en términos de las coordenadas generalizadas que usaremos para describir nuestro sistema. Lógicamente, lo mejor para este caso es usar coordenadas cilíndricas. A su vez, la coordenada  $z$  no es independiente de  $r$ , por lo que debemos escribir:

$$\mathbf{r} = (r \cos \phi, r \sin \phi, ar^2)$$

Lo verdaderamente potente de la mecánica lagrangiana es que si hemos llegado hasta aquí podemos dar el sistema por resuelto. Lo único que nos queda por hacer es un proceso de cálculo muy metódico. En primer lugar, escribimos el potencial al que está sometida la partícula, que como solo depende de las coordenadas de esta pues se obtiene fácilmente a través del vector posición. En este caso es el potencial gravitatorio:

$$V = mgz = mgar^2$$

Ahora, obtenemos la velocidad de la partícula simplemente derivando el vector anterior respecto del tiempo:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} (\cos \phi, \sin \phi, 2ar) + r\dot{\phi} (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

Para la energía cinética necesitamos la norma al cuadrado de este vector, es decir:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 (1 + 4a^2r^2) + r^2\dot{\phi}^2$$

Con todo esto ya tenemos el lagrangiano del sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 (1 + 4a^2r^2) + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - mgar^2 \quad (50)$$

Algo verdaderamente importante de esta formulación de la mecánica es que no es necesario resolver el sistema para obtener información valiosa de él. Aunque esto lo estudiaremos con detalle en la siguiente sección, con lo que sabemos ya podemos ver a partir del lagrangiano alguna cantidad conservada. En este caso, el lagrangiano no depende de  $\phi$ , es una coordenada cíclica. Esto significa que el momento canónico

conjugado asociado a esta variable (definido como la parcial del lagrangiano respecto de  $\dot{\phi}$ ) es una cantidad conservada.

$$p_{\phi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} = \text{cte.}$$

Las integrales primeras son fundamentales para la comprensión del sistema. Por ejemplo, ahora sabemos que si le damos una cierta velocidad angular a nuestra partícula esta nunca ocupará el punto más bajo del paraboloides. Además, esa relación nos permite desacoplar en nuestras ecuaciones  $r$  y  $\phi$ . Aplicando Euler-Lagrange a la coordenada  $r$  tenemos:

$$\ddot{r} (1 + 4 a^2 r^2) + 4 a^2 r \dot{r}^2 + 2gar = \frac{p_{\phi}^2}{m^2 r^3}$$

Finalmente, llegados a este punto destacamos que la mecánica lagrangiana solo nos permite obtener fácilmente las ecuaciones del movimiento, no facilita su resolución.

## 5. Simetrías y leyes de conservación. El teorema de Noether.

Decimos que un objeto tiene una simetría si al transformarlo de alguna forma este permanece invariante. Por ejemplo, un círculo es simétrico bajo una rotación ya que después de ella tiene el mismo aspecto. Existen pocos conceptos que sean tan intuitivos para el ser humano como el concepto de simetría y es por eso que en física lo usamos en abundancia.

Un ejemplo claro es cuando queremos calcular campos eléctricos o magnéticos producidos por diversos objetos. Lo primero que analizamos es qué transformaciones de coordenadas hacen que nuestro sistema se vea igual. Después de eso, entendemos claramente que nuestros campos no dependen de esa coordenada ya que no existe diferencia en nuestro sistema al cambiar su valor. Es fácil ver que el campo eléctrico producido por una esfera solo puede depender de nuestra distancia a ella ya que la esfera, dada una cierta distancia, se ve igual desde todos los puntos.

De la misma forma que hay pocas cosas tan intuitivas y fáciles de detectar para nosotros como las simetrías de un problema, hay pocas que sean tan importantes como lo son las leyes de conservación. El hecho de que una magnitud se conserve nos ayuda en gran medida a resolver las ecuaciones de movimiento. A su vez, nos permiten entender muchos fenómenos naturales.

El teorema de Noether no es más que una conexión entre estos dos conceptos. Nosotros lo vamos a estudiar en su aplicación a sistemas de partículas, aunque es más habitual verlo en el contexto de las teorías de campos. A su vez, destacamos que no

vamos a estudiar su formulación más general, nos restringiremos a un tipo determinado de transformaciones en el sistema.

En primer lugar vamos a definir lo que es para nosotros una simetría en un sistema físico. De aquí en adelante, se va a suponer que el principio de mínima acción (principio de Hamilton) se cumple. Consideremos una transformación de coordenadas  $\mathbf{h}_s$  que dependa de un cierto parámetro  $s$  y que sea diferenciable respecto de él. A su vez, establecemos que cuando  $s = 0$  tenemos la transformación identidad.

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{h}_s(\mathbf{q}) \quad \mathbf{h}_0(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$$

Decimos que un sistema presenta una simetría respecto de esa transformación si se cumple que el lagrangiano queda invariante al cambiar  $\mathbf{q}$  por  $\mathbf{q}^*$ :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*, t)$$

Vamos a poner un ejemplo de sistema que presenta una simetría como la indicada. Consideremos el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(y, z) \quad (51)$$

Tomemos la siguiente transformación de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + s \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (52)$$

Es obvio que la transformación corresponde a desplazar el sistema una distancia  $s$  arbitraria en la dirección  $X$ . De forma equivalente, podemos entender que estamos desplazando el sistema de referencia en la dirección  $X$  la misma distancia en sentido opuesto. Desde luego entra dentro de las transformaciones que consideramos y es obvio que, puesto que  $s$  es independiente del tiempo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2} + \dot{z}^{*2}) - V(y^*, z^*) \quad (53)$$

Dado que los lagrangianos de las ecuaciones 51 y 53 son iguales decimos que el sistema es simétrico respecto de la transformación 52. Como vemos, no estamos considerando el caso más general de transformación ya que, por ejemplo, estas no involucran el tiempo. Es más, también podríamos considerar transformaciones sobre el propio tiempo de las cuales solo estudiaremos una más adelante.

Ahora, vamos a demostrar el teorema de Noether. Este nos dice que si el sistema tiene una simetría respecto de una transformación de coordenadas como la considerada, entonces hay una cantidad conservada. Tomamos  $\mathbf{q}(t)$  como la trayectoria real de



nuestro sistema. A su vez, consideramos la transformación  $\mathbf{q}^*(t; s) = \mathbf{h}_s(\mathbf{q}(t))$ , que deja invariante el lagrangiano, es decir:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}^*(t; s), \dot{\mathbf{q}}^*(t; s), t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$$

Destacamos que en este caso  $\dot{\mathbf{q}}^*(t; s)$  representa la derivada parcial respecto del tiempo. Debemos recordar que habíamos dicho que para  $s = 0$  la transformación  $\mathbf{h}_s$  se convierte en la identidad:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}^*(t; s), \dot{\mathbf{q}}^*(t; s), t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}^*(t; 0), \dot{\mathbf{q}}^*(t; 0), t)$$

De esta forma, llegamos a la siguiente identidad:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \right|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{q}^*(t; s), \dot{\mathbf{q}}^*(t; s), t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}^*(t; 0), \dot{\mathbf{q}}^*(t; 0), t)}{s} = 0 \quad (54)$$

Recalcamos que esa derivada está bien definida puesto que el lagrangiano es diferenciable y habíamos supuesto que nuestra transformación de coordenadas también lo era. Así, vamos a calcularla<sup>5</sup>:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^*} \mathcal{L}(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*, t) \right|_{s=0} \left. \frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^*} \mathcal{L}(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*, t) \right|_{s=0} \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^*}{\partial s} \right|_{s=0}$$

Hacemos notar que derivar el lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*, t)$  respecto de  $\mathbf{q}^*$  y después tomar el caso  $s = 0$  es totalmente equivalente a derivar el lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  respecto de  $\mathbf{q}$ . Así, escribimos:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial s} \right|_{s=0}$$

Ahora, vamos a sustituir  $\mathbf{q}^*$  por  $\mathbf{h}_s$ . Queremos notar que en el segundo sumando, al tratar con derivadas parciales es totalmente equivalente hacer la derivada respecto de  $t$ , después respecto de  $s$  y evaluar en  $s = 0$  a hacer la derivada respecto de  $s$ , evaluar en  $s = 0$  y después hacer la derivada (total) respecto de  $t$ .

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{h}_s}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{h}_s}{\partial s} \right|_{s=0}$$

En este instante, debemos aplicar la regla de la derivada del producto en el segundo sumando para obtener:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \right|_{s=0} = \left( \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \left. \frac{\partial \mathbf{h}_s}{\partial s} \right|_{s=0} + \frac{d}{dt} \left( \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \mathbf{h}_s}{\partial s} \right|_{s=0} \right)$$

---

<sup>5</sup>Con derivada de un escalar respecto de un vector queremos decir que tenemos un vector cuyas componentes son las derivadas del escalar respecto de cada una de sus variables.

No obstante, habíamos dicho que  $\mathbf{q}(t)$  era la solución del sistema por lo que debe satisfacer Euler-Lagrange. De esta forma, el primer sumando se anula y nos queda:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \right|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left( \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \mathbf{h}_s}{\partial s} \right|_{s=0} \right)$$

Finalmente, aplicamos que la derivada parcial del lagrangiano respecto del parámetro  $s$  debe ser nula para que este sea invariante bajo la transformación.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \mathbf{h}_s}{\partial s} \right|_{s=0} \right) = 0} \quad (55)$$

Y así, queda demostrado el teorema de Noether. Este teorema no solo nos dice que si el sistema tiene una simetría hay una cantidad que permanece constante, además nos dice qué cantidad es esa.

## 6. Simetría bajo traslaciones y rotaciones.

En esta sección vamos a considerar dos casos particulares del teorema de Noether. Tomaremos un sistema de  $N$  masas puntuales sometidas a un potencial que solo depende de la distancia relativa entre ellas.<sup>6</sup> Este es uno de los casos más habituales en mecánica, de hecho así sucede con la interacción gravitatoria.

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|) \quad (56)$$

Vamos a considerar una traslación de nuestro sistema de referencia en la dirección del vector unitario  $\mathbf{u}$ . Esta se representa como:

$$\mathbf{h}_{s,i} = \mathbf{r}_i + s \mathbf{u} \quad (57)$$

Resulta obvio que nuestro lagrangiano es invariante respecto de esa transformación. En el término cinético tenemos derivadas respecto del tiempo que eliminarán esas constantes aditivas y en el potencial solo tenemos dependencia con la posición relativa de las partículas, que es invariante bajo traslación. Así, podemos aplicar el teorema de Noether:

$$\sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \frac{\partial \mathbf{h}_{s,i}}{\partial s} \right|_{s=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

---

<sup>6</sup>Vamos a representar ese tipo de potencial como  $V(\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|)$ . Debemos recordar que depende de la distancia relativa entre todas las partículas, no solo de dos de ellas.

Esto significa que la proyección de la suma de los momentos lineales de todas las partículas sobre la dirección  $\mathbf{u}$  es una cantidad conservada. Es más, como en este sistema esa dirección es arbitraria eso implica que

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (58)$$

es una cantidad conservada. Así, el momento total de un sistema se conserva debido a la simetría bajo traslación.

Ahora, vamos a considerar otra transformación del sistema verdaderamente interesante. Esta demostración se puede hacer de forma más general pero nosotros vamos a considerar un caso simple. Nuestra transformación va a ser una rotación de ángulo  $s$  en torno al eje  $Z$ . Este sistema es invariante bajo rotaciones puesto que su lagrangiano solo depende de la norma de vectores.

$$\mathbf{h}_{s,i}(\mathbf{r}_i) = \begin{pmatrix} \cos(s) x_i - \text{sen}(s) y_i \\ \text{sen}(s) x_i + \cos(s) y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (59)$$

Tomamos la derivada de la transformación respecto del parámetro  $s$ :

$$\frac{\partial \mathbf{h}_{s,i}}{\partial s} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(s) x_i - \cos(s) y_i \\ \cos(s) x_i - \text{sen}(s) y_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Evaluamos en  $s = 0$  y obtenemos:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{h}_{s,i}}{\partial s} \right|_{s=0} = \begin{pmatrix} -y_i \\ x_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora aplicamos el teorema de Noether:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \left. \frac{\partial \mathbf{h}_{s,i}}{\partial s} \right|_{s=0} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i)$$

Definimos el momento angular de la partícula  $i$ -ésima de acuerdo con  $\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$ . De esta forma, la simetría bajo rotaciones en torno al eje  $Z$  hace que la componente en ese mismo eje del momento angular total del sistema se conserve. Esto lo podríamos haber hecho para una rotación en torno a un eje arbitrario y habríamos llegado exactamente al mismo resultado. De esta forma, el momento angular total del sistema se conserva:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \quad (60)$$

Esta es la verdadera potencia del teorema de Noether. Supongamos que estamos observando el movimiento de un sistema planetario. ¿Si los planetas se desplazan a otro lugar vamos a observar un movimiento diferente? La respuesta es no, por ese motivo el momento lineal total de ese sistema se conserva. ¿Si giramos los planetas el movimiento cambia? No lo hace, por ese motivo se conserva el momento angular. Como vemos, hemos conectado la intuición más elemental con las leyes de conservación.

A su vez, este teorema es de gran importancia a la hora de atacar sistemas físicos. Por ejemplo, cuando estudiamos el sistema del paraboloide podríamos haber razonado sin plantear siquiera el vector posición que un paraboloide es simétrico respecto de rotaciones en el eje  $Z$ , por ese motivo la componente del momento angular en ese eje se debía conservar. Ese fue precisamente el resultado al que llegamos tras escribir el lagrangiano y ver que  $\phi$  era una coordenada cíclica.

## 7. Simetría temporal. El hamiltoniano.

En la formulación que hemos realizado del teorema de Noether no hemos tenido en cuenta transformaciones que involucren el tiempo. Lo que vamos a hacer ahora es considerar tan solo una de ellas que es de vital importancia. Esta es la traslación temporal. Mantenemos la forma de todas nuestras coordenadas pero consideramos una transformación en el tiempo dada por:

$$t^* = t + s$$

De la misma forma que en el caso anterior, vamos a imponer que el lagrangiano permanezca invariante frente a este tipo de transformación. Es decir:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t + s) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

Esto equivale a decir que no hay dependencia explícita temporal para el lagrangiano y por tanto su derivada parcial respecto a esta variable es nula. Lo que vamos a considerar ahora es la derivada total del lagrangiano respecto del tiempo:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Como siempre, usamos la regla de la derivada del producto:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Finalmente, utilizamos Euler-Lagrange y escribimos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L} \right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (61)$$

Como se puede apreciar, en el caso en el que la derivada parcial del lagrangiano es cero, tenemos una cantidad conservada. A esa cantidad la llamamos hamiltoniano.

$$H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L} \quad (62)$$

Definiendo el momento canónico conjugado de la coordenada  $q_i$  como:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (63)$$

escribimos el hamiltoniano de acuerdo con:

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (64)$$

Pese a que en sí mismo el hamiltoniano es una cantidad muy abstracta hay ciertos casos en los que nos va a resultar familiar. Por ejemplo, recuperemos el sistema descrito por el lagrangiano de la ecuación 56. No depende explícitamente del tiempo por lo que el hamiltoniano se conserva. Vamos a calcularlo:

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

$$H = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + V$$

Con ello, para este sistema el hamiltoniano coincide con la energía mecánica.

$$H = T + V = E \quad (65)$$

De esta forma, si alguna vez nos preguntamos por qué razón al tirar una pelota al suelo su energía mecánica se conserva, la respuesta es porque va a caer de la misma forma si la tiramos ahora o la tiramos en cualquier otro momento.

Pese a que hemos hecho todo el razonamiento aplicado a la mecánica, este sirve también para problemas de cálculo variacional en general. Así, vamos a resolver el problema de la braquistócrona con lo que sabemos. El problema consiste en encontrar qué curva debe seguir una partícula para ir de un punto  $A$  a otro  $B$  bajo la acción de la gravedad en el menor tiempo posible. Tomando el eje  $Y$  positivo hacia abajo escribimos la energía de esa partícula como:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$$

Suponiendo que el objeto parte del punto  $(0, 0)$  con velocidad nula, su energía total es cero, por lo que podemos escribir la velocidad en términos de la coordenada  $y$ :

$$v = \sqrt{2gy}$$

Ahora usamos la definición de velocidad:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

donde  $ds$  es el elemento diferencial de longitud, que podemos escribir como:

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx$$

Así, el tiempo que tarda el objeto en ir de  $x = 0$  hasta un cierto  $x = a$  viene dado por la expresión:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx \quad (66)$$

Debemos minimizar ese funcional. Para ello, hacemos notar que no hay dependencia explícita con  $x$ , por lo que el hamiltoniano se conserva. Es decir:

$$C = F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}}$$

Tan solo debemos multiplicar en ambos miembros por  $\sqrt{y(1 + y'^2)}$ . Con eso nos queda:

$$C\sqrt{y(1 + y'^2)} = 1 + y'^2 - y'^2 = 1$$

Finalmente, la ecuación diferencial que debe obedecer la curva es:

$$y(1 + y'^2) = C_1 \quad (67)$$

Esta ecuación se puede resolver por integración directa y llegaríamos a la solución:

$$x + C_2 = C_1 \left[ \arccos \left( \sqrt{1 - \frac{y}{C_1}} \right) - \sqrt{\frac{y}{C_1} \left( 1 - \frac{y}{C_1} \right)} \right]$$

También podemos imponer que la curva pase por el punto  $(0, 0)$  tomando  $C_2 = 0$ . Por otro lado, es fácil comprobar que esa curva se puede parametrizar de acuerdo con:

$$\begin{cases} x = C_1 (u - \text{sen}(u)) / 2 \\ y = C_1 (1 - \text{cos}(u)) / 2 \end{cases} \quad (68)$$

Hemos llegado a la ecuación paramétrica de una cicloide. Esta es la solución al problema de la braquistócrona.

## 8. Introducción a la mecánica hamiltoniana.

Hasta este instante habíamos considerado únicamente a las fuerzas y al lagrangiano como funciones que contienen toda la información de nuestro sistema. Resulta ser que el hamiltoniano también lo hace. Supongamos que tenemos una relación invertible entre las velocidades generalizadas y los momentos de nuestro sistema. En ese caso podemos escribir  $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  y tenemos unívocamente determinado el hamiltoniano escrito como:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (69)$$

De esta forma, el hamiltoniano no es más que la transformada de Legendre del lagrangiano. Aunque no vamos a analizar con más profundidad este concepto destacamos que esto implica que el lagrangiano no es más que la transformada de Legendre del hamiltoniano. Por este motivo, conociendo  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  podemos obtener  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . Así, ya que el lagrangiano contiene toda la información, el hamiltoniano también lo hace.<sup>7</sup>

Ahora, vamos a mostrar cómo obtener las ecuaciones de movimiento a partir del hamiltoniano. Para ello, consideramos el diferencial de este:

$$dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (70)$$

Y hacemos lo mismo utilizando su expresión en términos del lagrangiano:

$$dH = \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Aplicando la definición de momento llegamos a:

$$dH = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

---

<sup>7</sup>Conociendo exclusivamente  $H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  no podemos obtener el lagrangiano en términos de  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . Faltaría que nos diesen  $\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ .

Por último, aplicamos Euler-Lagrange:

$$dH = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (71)$$

Comparando las ecuaciones 70 y 71 obtenemos las ecuaciones de Hamilton.

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n)} \quad (72)$$

Como vemos, hemos transformado las  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden que nos daba Euler-Lagrange en  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden. Estas ecuaciones nos permiten conocer la evolución de cualquier magnitud dinámica que nos interese. Por supuesto, una magnitud dinámica en general tan solo depende de las coordenadas, los momentos y el tiempo explícitamente  $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . Veamos su derivada total respecto del tiempo:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Lo que hacemos ahora es sustituir las ecuaciones de Hamilton en la expresión anterior:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (73)$$

Definimos el corchete de Poisson de dos magnitudes  $f$  y  $g$  como:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (74)$$

Y así, escribimos la ecuación 73 según:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}} \quad (75)$$

De esta forma, el hamiltoniano nos permite conocer fácilmente la evolución temporal de cualquier magnitud dinámica deseada. Esta ecuación, al igual que toda la mecánica hamiltoniana, es un puente entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica. Su análogo cuántico es conocido como teorema de Ehrenfest.