Las Transformaciones de Lorentz

Sergio Ferrando Solera

1. La necesidad de la relatividad especial.

La relatividad supuso un profundo cambio en nuestra forma de entender el Universo. Esta teoría llevó a una reformulación de los principios más fundamentales de la física de la época y mostró los límites de la validez de estos. Ahora, nosotros vamos a dar marcha atrás en el tiempo y estudiar las razones que hicieron que grandes mentes como Lorentz y Einstein llegaran a la conclusión de que la física clásica se mostraba insuficiente para una descripción completa de la naturaleza.

A finales del siglo XIX, las bases de dos grandes teorías físicas como son la mecánica clásica y el electromagnetismo estaban bien asentadas. No obstante, no fue difícil comprobar que la combinación de ambas llevaba a conclusiones contradictorias. Con tal de eliminar estas contradicciones fue imprescindible "desechar" uno de los dos modelos. Destacamos que, realmente, el modelo en sí sigue siendo válido pero bajo unos ciertos límites de aplicabilidad.

Para entender dicha contradicción primero debemos introducir el concepto de sistema de referencia. Un sistema de referencia es un sistema de coordenadas que permite definir la posición de los objetos en el espacio junto con un reloj que nos indica el tiempo. Así, cualquier suceso viene caracterizado por tres coordenadas espaciales que nos dicen en qué lugar ocurre más una coordenada temporal que indica en qué instante ocurre. Si en dicho sistema de referencia vemos que los objetos que no están sometidos a fuerzas siguen trayectorias rectilíneas con velocidad constante, entonces decimos que ese sistema es inercial.

Uno de los resultados fundamentales de la mecánica clásica es lo que se conoce como transformaciones de Galileo. Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia inerciales O y O' que se mueven con velocidad relativa $\mathbf{v}$ uno respecto del otro. Si el observador O, por ejemplo, dice que un suceso ocurre en un cierto instante t con unas coordenadas (x, y, z), las transformaciones de Galileo nos permiten conocer qué instante t' y qué coordenadas (x', y', z') definen el suceso para O'.

Estas transformaciones se basan en dos postulados fundamentales. El primero de ellos nos dice que las leyes de la física son las mismas para dos sistemas de referencia inerciales. Esto significa que las expresiones deben adoptar la misma forma en ambos. El segundo afirma que el tiempo es absoluto y universal, lo que implica que para cualquier sistema de referencia tendremos $t = t'$. Bajo estas hipótesis llegamos a la conclusión de que, si ambos sistemas se mueven con sus ejes cartesianos paralelos y O' se mueve a lo largo del eje X del sistema O con velocidad v, la transformación de coordenadas es la siguiente:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{1}$$

Estas son las llamadas transformaciones de Galileo. Uno de los resultados clave que obtenemos a partir de ellas es la llamada ley de adición de velocidades. Para obtenerla, consideremos un objeto que se mueve con velocidad u' a lo largo del eje X del sistema O'. A partir de las transformaciones de Galileo debemos ser capaces de determinar la velocidad u con la que se mueve para O. Simplemente hay que aplicar la definición de velocidad:

$$u' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x - vt) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v = u - v$$

De esta forma, tenemos la ley de adición de velocidades:

$$u = u' + v \tag{2}$$

Este es un resultado totalmente intuitivo de la mecánica clásica. Supongamos que vemos a una persona subida en un tren que se desplaza respecto de nosotros a velocidad v. Esta persona lanza en la dirección del movimiento del tren una pelota que él dice que tiene velocidad u'. La ley de adición de velocidades nos dice que nosotros, fuera del tren, diremos que esa pelota se mueve a velocidad $u' + v$. Como vemos, un resultado totalmente intuitivo. No obstante, no es un resultado totalmente cierto.

Como hemos dicho, a finales del siglo XIX teníamos las bases de otra gran teoría física bien asentadas, la teoría electromagnética. El electromagnetismo estaba sustentado en un conjunto de cuatro ecuaciones conocidas como las ecuaciones de Maxwell. De estas ecuaciones se deduce que los campos electromagnéticos se pueden propagar como ondas en el vacío con una velocidad dada por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} \tag{3}$$

Donde ε_o es la permitividad dielélctrica del vacío y μ_o la permeabilidad magnética, dos constantes fundamentales. El valor numérico de esta expresión coincidía con el valor que se había obtenido experimentalmente para la velocidad de la luz con lo que se concluyó que esta era una onda electromagnética. De la misma forma que sucede con todas las ondas que conocemos (pensemos por ejemplo en las ondas sonoras) su velocidad de propagación tan solo depende de las propiedades del medio en el que nos encontramos. La gran diferencia con las ondas mecánicas es que ahora este medio es el vacío.

Retomemos el experimento del tren. En este caso vamos a considerar una persona que está en el techo con un altavoz emitiendo ondas sonoras. Tanto la persona que no está subida en este como la que sí lo está saben a la perfección que la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s. No obstante, tenemos claro que el observador en el techo va a decir que el sonido se desplaza más despacio. ¿No viola esto las leyes de propagación de las ondas? La respuesta es no. Esa persona sabe perfectamente que el aire se está moviendo respecto de él por lo que sabe que, efectivamente, la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s, pero percibe ese viento que le hace notar que él no está en reposo respecto del medio. A su vez, todas las velocidades en este caso cumplen con la ley de adición de velocidades.

El problema viene cuando en lugar de las ondas mecánicas consideramos las ondas que se propagan sin necesidad de un medio material. Ahora, tomemos el experimento anterior pero consideremos que los dos observadores tienen una linterna y que están en el vacío. Cada uno de estos observadores tiene todo el derecho del mundo a decir que está en reposo, ya que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes. A su vez, como estamos en el vacío no sucede igual que en el caso anterior y ninguna de las dos personas percibe ningún tipo de viento. Esto les hace concluir, puesto que la velocidad de la luz es c cuando no estamos en presencia de un medio material y que ninguno de ellos se desplaza respecto del medio de propagación de esta onda, que ambos miden la misma velocidad para la luz.

Este hecho es una clara violación de la ley de adición de velocidades y, por tanto, contradice las transformaciones de Galileo y los dos postulados en las que estas se basan. Existen tan solo dos opciones para evitar esta contradicción. La primera de ellas es decir que o bien la teoría electromagnética o bien la mecánica clásica están equivocadas desde sus cimientos. La segunda opción es decir que en realidad el vacío no es vacío y existe un objeto que llena todo el espacio al que llamamos éter por el cual se propaga la luz.

Si lo último que hemos dicho es cierto, eso significa que la velocidad de la luz que un observador mide depende de su movimiento respecto de este éter de la misma forma que la velocidad del sonido que apreciamos depende de nuestro movimiento respecto del aire. Puesto que el planeta Tierra se desplaza en torno al Sol y el Sol se desplaza respecto del centro galáctico, sería lógico pensar que nos estamos desplazando respecto del éter. De esta forma, dependiendo de nuestra orientación deberíamos detectar una velocidad u otra para la luz.

Michelson y Morley hicieron un experimento con el objetivo de demostrar la existencia del éter midiendo las diferencias entre las velocidades de distintos rayos de luz con diferente dirección de desplazamiento. No obstante, llegaron a la conclusión contraria. Siempre medían exactamente la misma velocidad para la luz, lo que les hizo concluir que el éter no existía. De esta forma, era necesario que, o la mecánica clásica o el electromagnetismo, estuvieran equivocados.

2. Los postulados de la relatividad especial.

Llegados a este punto tenemos dos opciones, aceptar la mecánica clásica o aceptar el electromagnetismo. Gran parte de la comunidad científica de la época se decantó por la primera opción. No obstante, otras personas tomaron como válida la teoría de Maxwell ya que esta también contaba con un fuerte respaldo experimental. Por ejemplo, Hertz fue capaz de producir ondas electromagnéticas que más tarde sirvieron para las telecomunicaciones.

Como dijimos, las transformaciones de Galileo se basan en suponer que las leyes de la física se deben escribir igual en todos los sistemas de referencia inerciales y que el tiempo es universal. De esta forma, negar la validez de la teoría clásica es equivalente a negar la validez de estos principios. Nosotros vamos a suponer que el primer principio sigue siendo válido, pero sustituimos el hecho de que el tiempo sea igual para todos los sistemas de referencia por suponer que la velocidad de la luz es un invariante. Con ello, somos consistentes con la teoría electromagnética.

Lo que vamos a hacer ahora es obtener las transformaciones consistentes con estos dos principios, las transformaciones de Lorentz. En primer lugar, tomamos dos sistemas de referencia inerciales O y O' que se desplazan con sus ejes de coordenadas paralelos. Supondremos que O' se desplaza a lo largo del eje X de O con velocidad v y que cuando ambos orígenes se encuentran en el mismo punto los dos observadores sincronizan sus relojes. Con todas estas suposiciones ya podemos tomar que, debido a que ninguna física sucede en esos ejes, $y = y'$ y $z = z'$.

Nos queda obtener la transformación para pasar de (t, x) a (t', x'). No obstante, para que las magnitudes de los vectores que hemos considerado tengan las mismas dimensiones consideramos el paso de (ct, x) a (ct', x'). Esto lo podemos hacer así debido a que en ambos sistemas de referencia c es igual, es una constante, por lo que ct está igualmente bien definido para ambos.

Lo primero que debemos tener en cuenta es que el primer postulado de la relatividad especial nos dice que las leyes de la física deben escribirse igual en ambos sistemas de referencia. Eso significa que mi transformación para pasar del sistema de referencia O al sistema de referencia O' debe ser idéntica a la transformación para pasar de O' a O. El único cambio sería que si para O el observador O' se mueve en sentido positivo, para O' el observador O se mueve en sentido negativo y viceversa. Con lo cual, la transformación y su inversa deben tener la misma forma funcional. La única transformación que cumple esto es una transformación lineal por lo que podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{4}$$

Nuestro objetivo actual es determinar los coeficientes de esa matriz de transformación. Para ello, el primer evento que consideraremos es el movimiento del propio O'. Desde su punto de vista se cumple que $x' = 0$ puesto que mide su posición respecto de sí mismo, pero para O se cumple $x = vt$, ya que para él O' se mueve con velocidad v.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix}$$

$$0 = rc + sv$$

$$r = -\frac{v}{c}\, s = -\beta s$$

Con ello, nuestra transformación tiene tendrá la forma:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ -\beta s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{5}$$

El siguiente suceso a considerar es el movimiento de O. Análogamente al caso anterior, O se ve a él mismo en reposo, por lo que $x = 0$. Por otra parte, O' percibe que O se mueve con velocidad $-v$, por lo que $x' = -vt'$.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ -vt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ -\beta s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} t' = pt \\ t' = st \end{cases}$$

$$p = s$$

Y sustituyendo en la transformación:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & q \\ -\beta s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{6}$$

El último suceso a considerar es la observación de un rayo de luz. Puesto que la velocidad de la luz es la misma para cualquier observador, O dirá que la posición del extremo del rayo es $x = ct$ y O' dirá que es $x' = ct'$.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & q \\ -\beta s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ct \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} t' = (s + q)\, t \\ t' = (s - \beta s)\, t \end{cases}$$

$$q = -\beta s$$

Con lo que la transformación de Lorentz adquiere la forma:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{7}$$

Por otro lado, también podemos obtener la ley de transformación inversa:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{s\,(1-\beta^2)} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \tag{8}$$

Como vemos, las β cambian de signo en la matriz. Esto, tal y como habíamos comentado, es totalmente lógico y aceptable. Si para O el sistema O' se mueve en un cierto sentido, para O' el sistema O se debe mover en sentido contrario. De ahí que se cambie v por $-v$. Lo que no podemos aceptar es que las matrices estén multiplicadas por factores diferentes; eso contradice el hecho de que las leyes se deben escribir igual para todos los sistemas de referencia. Con lo cual, debemos imponer la condición:

$$s = \frac{1}{s\,(1-\beta^2)}$$

Generalmente, al parámetro s en el contexto de la relatividad lo llamamos γ y su expresión es:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{9}$$

Finalmente, la transformación de Lorentz viene dada por:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{10}$$

Por otro lado, la transformación inversa es:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \tag{11}$$

Como se puede ver, se satisface claramente el primer postulado de la relatividad especial, la ley para pasar de O a O' es idéntica (salvo un signo en la velocidad) a la ley para pasar de O' a O. Es más, debemos recalcar que esta es la única transformación consistente con los dos postulados de la relatividad especial.

3. Las implicaciones de las transformaciones de Lorentz.

Llegados a este punto, lo primero que deberíamos demostrar es que, ya que las transformaciones de Galileo parecieron ser válidas durante tanto tiempo, las transformaciones de Lorentz deben reducirse a estas para un determinado límite. Obviamente, en la vida cotidiana nunca se nos presentan situaciones en las que diversos observadores tengan velocidades comparables con la velocidad de la luz. Por ello, vamos a tomar el límite $\beta \to 0$ en nuestras ecuaciones. La transformación del tiempo viene dada por:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right) \tag{12}$$

Conforme $\beta \to 0$, el factor γ tiende a uno. Por ese motivo es obvio que en ese límite recuperamos el resultado $t' = t$. Ahora, consideremos la transformación para el espacio:

$$x' = \gamma \left(x - vt \right) \tag{13}$$

que es obvio que en el límite $\beta \to 0$ se convierte en $x' = x - vt$. Desde este momento, vamos a ver ciertas implicaciones que tienen las transformaciones de Lorentz y que cambian por completo nuestra concepción de la realidad física. Por ejemplo, volvamos a escribir la transformación para el tiempo. Pero en este caso tomando el intervalo temporal entre dos sucesos:

$$c\Delta\, t' = \gamma \left(c\Delta t - \beta\, \Delta\, x \right) \tag{14}$$

Supongamos que para el sistema O ambos sucesos son simultáneos, es decir, $\Delta t = 0$. De esta forma, el intervalo temporal para ellos no es otra cosa que:

$$c\Delta\, t' = -\gamma\, \beta\, \Delta\, x \tag{15}$$

La ecuación 15 tiene implicaciones físicas inmensas. Mientras que para O los sucesos son simultáneos, para O' no lo son. El hecho de que un observador vea una cierta distancia espacial entre ellos hace que otro observador vea un intervalo temporal. Vemos que, en relatividad, la distinción entre tiempo y espacio es algo que solo depende del sistema de referencia.

Ahora, vamos a definir lo que entendemos en relatividad por medir un tiempo. Supongamos que O' mide el tiempo que tarda en hacer un cierto viaje. Como desde su punto de vista se encuentra en reposo, tomamos $\Delta x' = 0$. Ahora, queremos saber el tiempo que O considera que O' ha tardado. Simplemente aplicando la transformación de Lorentz llegamos a:

$$\Delta\, t = \gamma \Delta\, t' \tag{16}$$

Es decir, O considera que O' ha tardado más en hacer el viaje de lo que dice. Este fenómeno se conoce como dilatación temporal e implica también que para O' la distancia que tenía que recorrer se ha acortado.

Ahora, vamos a considerar la transformación de la longitud de los objetos. En este caso O, mide en un determinado instante ($\Delta t = 0$) la longitud de un objeto que lleva O'. Puesto que si la medición de los dos extremos es un suceso simultáneo para O para O' no lo es, este último mide primero la posición de un extremo del objeto y luego la posición de otro. No obstante, como el objeto se desplaza con él da igual medir primero un punto y luego otro que medirlos a la vez. Aplicando la transformación de Lorentz tenemos:

$$L = \frac{L'}{\gamma} \tag{17}$$

Dicho de otra forma, O ve que el objeto se acorta. Esto es lo que se conoce como contracción espacial. Tanto para la dilatación temporal como para la contracción espacial debemos recalcar que el otro observador dice precisamente lo contrario. O' cree que para O el tiempo pasa más despacio y que los objetos que están con él se acortan.

En este instante, vamos a demostrar que las transformaciones de Lorentz conducen a un cierto invariante de vital importancia. Tomemos la magnitud s^2 definida como:

$$s^2 = (c\,\Delta\,t)^2 - (\Delta\,x)^2 \tag{18}$$

Calculémosla para el sistema de referencia O':

$$(c\,\Delta\,t')^2 - (\Delta\,x')^2 = (\gamma\,c\Delta\,t - \beta\gamma\,\Delta\,x)^2 - (\gamma\,\Delta\,x - \beta\gamma\,c\,\Delta\,t)^2 = (c\,\Delta\,t)^2 - (\Delta\,x)^2$$

Como vemos, hemos encontrado una cantidad que las transformaciones de Lorentz dejan invariante. A esa cantidad la conocemos como intervalo y es de vital importancia para la caracterización de la estructura geométrica de nuestra teoría. Como es lógico, en relatividad solemos tratar con cantidades vectoriales en cuatro dimensiones llamadas cuadrivectores. Por ejemplo, un evento viene caracterizado por el cuadrivector:

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

Aplicando una transformación de Lorentz podemos escribir ese cuadrivector en otro sistema de referencia. Es algo totalmente análogo a un cambio de base. A su vez, dicha transformación tiene determinante uno y deja invariante el intervalo relativista $s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Así, podemos entender estas transformaciones como rotaciones en cuatro dimensiones que dejan invariante la norma de los vectores. No la norma usual, sino la norma asociada al intervalo dado por s^2.

Por último, consideraremos la ley de adición de velocidades relativista. Vamos a suponer que O ve un objeto que se mueve con velocidad u, es decir, $\mathrm{d}x = u\mathrm{d}t$. Tomemos las transformaciones de Lorentz en forma diferencial:

$$\mathrm{d}t' = \gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\,\mathrm{d}x\right) = \gamma\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}x' = \gamma\,(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t) = \gamma\,(u - v)\,\mathrm{d}t$$

Dividiendo, llegamos a la ley de transformación de la velocidad relativista:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}} \tag{19}$$

Es sencillo ver que si u y v son mucho menores que la velocidad de la luz llegamos a la ley de adición de velocidades de Galileo. También podemos comprobar que en el caso en el que $u = c$ para O' también se cumple $u' = c$.